

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950 - 003

Voordracht in de serie Actualiteiten

Enige methoden in de sequentieanalyse II

25 februari 1950

J.H.B. Kemperman



1950

Voordracht door J.H.B. Kemperman in de serie
Actualiteiten op 25 Februari 1950.

Enige methoden in de sequentieanalyse II.¹⁾

1. Een methode.

Beschouw het rooster $\mathcal{Y}$ van alle punten (n, y) in het $n-y$ -vlak met gehele coördinaten. Laten r en s zekere gehele getallen voorstellen met $r+s \neq 0$.

Een (dronken) wandelaar W beweegt zich op de volgende wijze door $\mathcal{Y}$.

1. Hij begint in de oorsprong .
2. Wanneer W in een zeker roosterpunt (n, y) arriveert, dan zijn er de volgende drie mogelijkheden:
 - a) hij valt in een put (een z.g. catastrofe) met een waarschijnlijkheid $v(n, y)$;
 - b) hij doet een stap, die hem in het punt $(n+1, y-s)$ brengt met een wh $p(n, y)$;
 - c) hij doet een stap naar het punt $(n+1, y+r)$ met wh $q(n, y)$.

Hierin is

$$(1) \quad p(n, y) + q(n, y) + v(n, y) = 1$$

We interesseren ons nu voor de kans $\alpha(n, y)$, dat in het punt (n, y) een catastrofe optreedt. We zullen een algemene methode geven onder de volgende veronderstellingen.

- 1) Zij $\mathcal{R}$ een O niet bevattende deelverzameling van $\mathcal{Y}$ (de z.g. rand) bestaande uit een eindig aantal N periodieke componenten $\mathcal{R}_h$. Hierin bestaat $\mathcal{R}_h$ ($h = 1, 2, \dots, N$) uit de punten

$$P_{h,i} = (n_h + i\omega, y_h + i\mu) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

waarin n_h, ω en μ gehele getallen voorstellen met $\omega > 0$ en $n_h \geq 0$.

- 2) Voor een niet in $\mathcal{R}$ gelegen punt $(n, y) \neq (0, 0)$ geldt

$$v(n, y) = v \quad ; \quad p(n, y) = p \quad ; \quad q(n, y) = q,$$

waarin p, q en v niet negatieve constanten zijn met $0 \leq v < 1$ en

¹⁾ v.g.l. Enige methoden in de sequentieanalyse I, rapport Z.W. 1949-009 (voordracht in de serie Actualiteiten op 29 Oct. '49).

$$(2) \quad p + q = 1 - v$$

Voor de oorsprong O veronderstellen we evenwel, dat

$$(3) \quad v(0,0) \neq 0 \quad ; \quad p(0,0) = \frac{p}{1-v} \quad ; \quad q(0,0) = \frac{q}{1-v} .$$

3) Voor een punt (n,y) uit R_k ($k = 1, 2, \dots, N$) geldt

$$(4) \quad v(n,y) = v_k \quad ; \quad p(n,y) = p \frac{1-v_k}{1-v} \quad ; \quad q(n,y) = q \frac{1-v_k}{1-v} ,$$

waarin $0 \leq v_k \leq 1$. Wegens (2) is dan aan (1) voldaan.

Opm. Men mag eventueel toelaten, dat R behalve periodieke componenten bovendien eindig vele punten bevat (waarin $p(n,y)$, $q(n,y)$, $v(n,y)$ zijn voorgeschreven) doch de berekening van $v(n,y)$ wordt dan te omslachtig.

Het is duidelijk, dat voor het bijzondere geval met $v = 0$ en $v_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, N$) met deze situatie een sequentietest overeenkomt, mits men R verdeelt in twee disjuncte delen, waarop een sequentie wordt goedgekeurd resp. afgekeurd. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we ons beperken tot het geval $\mu = 0$ (v.g.l. de transformatie aangegeven op blz. 8 van het rapport Z.W., 1949-009). Ter vereenvoudiging zullen we aannemen, dat $0 \leq v_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Om de formulering van de methode te vergemakkelijken¹⁾ zullen we verder aannemen, dat $v \leq v_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Zoals men achteraf gemakkelijk inziet, is het uiteindelijke resultaat (in het bijzonder formule (12)) ook geldig, wanneer aan de laatste veronderstelling niet is voldaan.

We stellen nu voor $(n,y) \neq (0,0)$

$$(5) \quad v(n,y) = v + r(n,y)$$

Voor een punt (n,y) op R_k (resp. buiten R) geldt dus $v(n,y) = v_k - v = r_k$ (resp. $r(n,y) = 0$). Wanneer W in (n,y) arriveert, dan is er een kans $v(n,y)$ op een catastrofe. We onderscheiden nu gewone catastrofes en randcatastrofes, en spreken af, dat wanneer W in (n,y) arriveert, er een kans v is op een gewone catastrofe en een kans $r(n,y)$ op een randcatastrofe. Een randcatastrofe kan dus alleen voor een randpunt een van nul verschillende waarschijnlijkheid hebben. In overeenstemming met (3) stellen we voor O de kans zowel op een gewone catastrofe als op een randcatastrofe gelijk nul.

¹⁾ Anders moeten we werken met een negatieve kans op z.g. randcatastrofes, overeenkomend met een positieve kans, dat een z.g. gewone catastrofe ongedaan wordt gemaakt.

Als de wandelaar W in een punt (n, y) arriveert, dan zijn er dus vier mogelijkheden:

- a) Er treedt een gewone catastrofe op met kans v .
- b) Er treedt een randcatastrofe op met kans $r(n, y)$.
- c) W doet een stap naar het punt $(n+1, y-s)$ met kans $p \frac{1-v(n, y)}{1-v}$
- d) W doet een stap naar het punt $(n+1, y+r)$ met kans $q \frac{1-v(n, y)}{1-v}$

Voor de oorsprong handhaven we evenwel de afspraak (3). We zullen deze situatie een gestoorde wandeling noemen. Als voor een gestoorde wandeling $\alpha(n, y)$ de kans voorstelt op een catastrofe in het punt (n, y) , dan is

$$(6) \quad \frac{r(n, y)}{v(n, y)} \cdot \alpha(n, y) = \frac{r(n, y)}{v + r(n, y)} \cdot \alpha(n, y)$$

de kans op een randcatastrofe in het punt (n, y) .

Wanneer in het geval van een randcatastrofe in het punt (n, y) , W direct wordt vrijgelaten en vervolgens ofwel een stap doet naar het punt $(n+1, y-s)$ (met wh $\frac{p}{1-v}$), ofwel een stap doet naar het punt $(n+1, y+r)$ (met wh $\frac{q}{1-v}$), dan zeggen we dat W een vrije wandeling uitvoert. Men kan een vrije wandeling dus ook definieren als een in O beginnende wandeling (het vertrek vanuit O wordt weer door (3) bepaald), waarvoor bij aankomst in het punt (n, y) de volgende drie mogelijkheden bestaan.

- a) er treedt een gewone catastrofe op met wh v .
- (7) b) W doet een stap naar $(n+1, y-s)$ met wh p .
- c) W doet een stap naar $(n+1, y+r)$ met wh q .

Zij $\gamma(n, y)$ de kans voor een vrije wandeling (beginnend in de oorsprong), dat W in het punt (n, y) arriveert. We stellen $\gamma(0, 0) = 1$. Deze grootte is precies bekend, zoals we spoedig zullen zien. Zij in het bijzonder $P_{k, i} = (n_k + i\omega, y_k)$ een randpunt. Dan is $\gamma_k(n_k + i\omega, y_k)$ de kans, dat voor een vrije wandeling, beginnend in de oorsprong, in het randpunt $P_{k, i}$ een randcatastrofe optreedt (waarna overigens W direct weer zou worden vrijgelaten). In dit geval is in zeker randpunt $P_{k, i}$ voor het eerst een randcatastrofe opgetreden (gerekend vanaf de oorsprong). De kans, dat voor een vrije wandeling in een punt (n, y) voor het eerst een randcatastrofe optreedt, is juist gelijk aan de kans, dat voor een gestoorde wandeling vanaf O een randcatastrofe optreedt in het punt (n, y) . Deze kans wordt gegeven door (6). Stellen we voor het randpunt $P_{k, l} = (n_k + l\omega, y_k)$

$$\alpha_{k, l} = \alpha(n_k + l\omega, y_k)$$

dan is dus $\frac{r_{k, l}}{v + r_{k, l}}$ de kans, dat voor een vrije wandeling in het

randpunt $P_{k,l}$ voor het eerst een randcatastrofe optreedt. Zij nu $P_{k,l} \neq P_{k,i}$. Nadat in $P_{k,i} = (n_k + i\omega, y_k)$ voor een vrije wandeling een randcatastrofe is opgetreden, wordt de wandelaar W weer vrijgelaten en is na een vrije wandeling (onder voorwaarde dat in $P_{k,l}$ voor de eerste maal een randcatastrofe is opgetreden) de kans op een randcatastrofe in $P_{k,i} = (n_k + i\omega, y_k)$ juist

$$r_k \gamma(n_k - n_k + (i-k)\omega, y_k - y_k)$$

zoals direct volgt uit de definitie van $\gamma(n, y)$ (waarbij we rekening moeten houden met het bijzondere karakter van de oorsprong, v.g.l.

(3)). Sommeren we nu over alle randpunten, dan volgt voor de kans op een randcatastrofe in $P_{k,i}$ na een vrije wandeling

$$r_k \gamma(n_k + i\omega, y_k) = \frac{r_k}{r + r_k} \alpha_{k,i} + r_k \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_k}{r + r_k} \alpha_{k,l} \gamma(n_k - n_k + (i-l)\omega, y_k - y_k)$$

of wegens $\gamma(0,0)=1$

$$(8) \quad \gamma(n_k + i\omega, y_k) = \frac{1 - r_k}{1 + r_k} \alpha_{k,i} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_k}{1 + r_k} \alpha_{k,l} \gamma(n_k - n_k + (i-l)\omega, y_k - y_k)$$

Aan elk randpunt $P_{k,i} = (n_k + i\omega, y_k)$ voegen we nu een karakteriserende term toe

$$\alpha_{k,i} u^{n_k + i\omega} w^{y_k}$$

en aan de randcomponent R_k de ontwikkeling

$$(9) \quad A_k(u, w) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{k,i} u^{n_k + i\omega} w^{y_k},$$

de z.g. h-de component van de randontwikkeling. We stellen verder

$$(10) \quad F_{n,y} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(n + i\omega, y) u^{n + i\omega} w^y$$

voor $n < 0$ heeft deze ontwikkeling zin, als we stellen

$$(11) \quad \gamma(n, y) = 0 \quad \text{voor } n < 0.$$

Gebruik makend van formule (8) en de substitutie $i+l=m$ volgt nu

1) We mogen veronderstellen, dat $r_k \neq 0$, daar voor $r_k = 0$ de randcomponent R_k niet actief is.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{n_h, y_h} &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(n+i\omega, y_h) u^{n_h+i\omega} w^{-y_h} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} u^{n_h+i\omega} w^{-y_h} \left\{ \frac{1-\alpha_h}{\omega+\alpha_h} \alpha_{h,i} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_{h,k}}{\omega+\alpha_h} \alpha_{h,l} \gamma(n_h-n_k+i\omega, y_h-y_k) \right\} \\
 &= \frac{1-\alpha_h}{\omega+\alpha_h} A_h + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_{h,k}}{\omega+\alpha_h} \alpha_{h,l} u^{n_h-n_k+l\omega} w^{-y_h} \\
 &\quad \cdot \sum_{m=-l}^{\infty} \gamma(n_h-n_k+m\omega, y_h-y_k) u^{n_h-n_k+m\omega} w^{-y_h-y_k}
 \end{aligned}$$

Wegens $0 \leq n_h < \omega$ en $0 \leq n_k < \omega$ volgt $n_h - n_k < \omega$. Voor $m < 0$ is dus $n_h - n_k + m\omega < 0$ en $\gamma(n_h - n_k + m\omega, y_h - y_k) = 0$. In de laatste uitdrukking mogen we dus $\sum_{m=-l}^{\infty}$ vervangen door $\sum_{m=0}^{\infty}$. We vinden nu

$$(12) \quad \mathcal{F}_{n_h, y_h} = \frac{1-\alpha_h}{\omega+\alpha_h} A_h + \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{h,k}}{\omega+\alpha_h} \mathcal{F}_{n_h-n_k, y_h-y_k} A_k.$$

Uit dit stelsel vergelijkingen kan men in het algemeen $A_1, A_2, \dots, A_N$ oplossen, waarmee we voor een gestoorde wandeling wegens (9) voor elk randpunt $P_{h,i}$ de kans $\alpha_{h,i}$ op een catastrofe in $P_{h,i}$ in principe kunnen bepalen. De kans op een catastrofe op de randcomponent R_h is juist $A_h(1,1)$. Onder de bijvoorwaarde, dat W zijn weg beeindigt, doordat op R_h een catastrofe optreedt, wordt het gemiddelde aantal stappen gegeven door

$$(13) \quad \left[\frac{\frac{\partial}{\partial u} A_h(u, \omega)}{A_h(u, \omega)} \right]_{u=\omega+1}$$

Neem aan, dat W een vrije wandeling uitvoert (vanaf de oorsprong) in de zin van definitie (7). Als W in (n, y) arriveert, na j stappen van het type

$$(14) \quad (n', y') \rightarrow (n'+1, y'-s)$$

(elk met een $wh p$) en k stappen van het type

$$(15) \quad (n', y') \rightarrow (n'+1, y'+r)$$

(elk met een $wh q$), dan geldt

$$(16) \quad j + k = n \quad \text{en} \quad kr - js = y,$$

waarin dus j en k gehele getallen ≥ 0 zijn. Uit (16) volgt

$$(17) \quad k = \frac{nr+y}{r+s} \quad \text{en} \quad j = n - k$$

en het punt (n, y) is dus alleen bereikbaar vanuit 0, als $\frac{nr+y}{r+s}$ een geheel getal is ≥ 0 en $\leq n$, ofwel

$$(18) \quad -r \leq \frac{y}{s} \leq +s$$

Om de kans $\gamma(n, y)$ te bepalen, dat W na een vrije wandeling in het punt (n, y) arriveert, merken we vooreerst op, dat $\gamma(n, y) = 0$ wanneer (n, y) niet vanuit 0 bereikbaar is. Is (n, y) wel bereikbaar, dan bestaan er niet-negatieve gehele getallen j en k , waarvoor (16) vervuld is. Er zijn juist $\binom{j+k}{j}$ gelijkwaardige mogelijkheden om door j stappen van het type (14) en k stappen van het type (15) vanuit de oorsprong het punt (n, y) te bereiken. In verband met de bijzondere afspraak (3) voor de oorsprong, heeft elk dezer mogelijkheden een wh $\frac{r^j q^k}{1-w}$. Hieruit volgt voor elk van 0 verschillend, bereikbaar punt (n, y)

$$(19) \quad \gamma(n, y) = \binom{j+k}{j} \frac{r^j q^k}{1-w}$$

waarin j en k volgens (17) worden bepaald. De ontwikkeling $\mathcal{K}_{n,y}$ mag dus als gegeven worden beschouwd.

Wanneer r en s een grootste gemene deler hebben, dan volgt uit (16), dat voor een bereikbaar punt (n, y) steeds d een deler is van y . Zonder de algemeenheid te schaden mogen we dus aannemen, dat r en s onderling ondeelbaar zijn (stel anders $r' = \frac{r}{d}$, $s' = \frac{s}{d}$ en $y' = \frac{y}{d}$). Wanneer (n_1, y) en (n_2, y) beide bereikbare punten zijn, dan volgt nu uit (17), dat $n_1 - n_2$ een veelvoud is van $(r+s)$. Daarom zullen we formule (12), waarin A_n en $\mathcal{K}_{n,y}$ door (9) resp. (10) zijn gedefinieerd, bij voorkeur toepassen voor het bijzondere geval $w = r+s$. In dat geval is ofwel geen punt, ofwel elk punt van $\mathcal{R}_y$ bereikbaar (voor zover aan (18) is voldaan). In het eerste geval heeft $\mathcal{R}_y$ geen enkele invloed op de beweging van de wandelaar W , en (in het geval $w = r+s$) mogen we dus veronderstellen, dat $\mathcal{R}_y$ alle bereikbare punten van de lijn $y = y_0$ omvat.

Zij y een geheel getal. Laten j_0 en k_0 de kleinste niet-negatieve gehele getallen voorstellen met $k_0 r - j_0 s = y$. Dan wordt de abscis van de bereikbare roosterpunten op de lijn met ordinaat y geven door

$$n_i = j_0 + k_0 + i(r+s) \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Wegens (19) en

$$(j_0 + i r) + (k_0 + i s) = n_i \quad ; \quad (k_0 + i s) r - (j_0 + i r) s = y$$

volgt nu voor $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma(n_i, y) = \binom{j_0 + k_0 + i(r+s)}{j_0 + i r} \frac{r^{j_0 + i r} q^{k_0 + i s}}{1-w}$$

(evenwel geldt $\chi(0,0)=1$). In verband met definitie (10) vinden we nu voor het geval $\omega=r+s$.

$$(20) \quad K_{n_0, y} = \frac{\omega^y}{1-\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0+k_0+i(r+s)}{j_0+ir} p^{j_0+ir} q^{k_0+is} \omega^{j_0+k_0+i(r+s)},$$

waarin $n_0 = j_0 + k_0$. Voor $n \not\equiv n_0 \pmod{r+s}$ zijn alle punten $(n+i(r+s), y)$ met $i = 0, 1, 2, \dots$ onbereikbaar en geldt dus $K_{n, y} \equiv 0$. We stellen de ontwikkeling in het rechterlid van (20) behorende bij de verzameling van alle roosterpunten met ordinaat y gelijk aan K_y . Dan volgt uit

$$(21) \quad K_y = \frac{\omega^y}{1-\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0+k_0+i(r+s)}{j_0+ir} (p\omega)^{j_0+ir} (q\omega)^{k_0+is}$$

Voor $y=0$ is $j_0 = k_0 = 0$ en moeten we de constante in de ontwikkeling vervangen door $\chi(0,0)=1$ d.w.z. we moeten het rechterlid van (21) verminderen met $\frac{\omega}{1-\omega}$.

In de veronderstelling, dat K_r bestaat uit de verzameling van alle bereikbare punten op de lijn $y=y_h$ gaat formule (12) over in

$$(22) \quad K_{y_h} = \frac{1-r_h}{\omega+r_h} A_h + \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{\omega+r_k} K_{y-y_k} A_k \quad (h=1, 2, \dots, N).$$

Zij $r(y) = r(n, y)$ de door (5) gedefinieerde grootheid. Zij verder $\beta(n, y)$ de kans, dat W_{na} een gestoorde wandeling in het punt (n, y) arriveert. Dan geldt

$$(23) \quad (\omega + r(y)) \beta(n, y) = \alpha(n, y)$$

Vorm nu

$$(24) \quad D_y = \omega^y \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n, y) \omega^n$$

Analoog met (22) kan men bewijzen

$$(25) \quad K_y = (1-r(y)) D_y + \sum_{k=1}^N r_k K_{y-y_k} D_{y_k}$$

Wegens (9), (24) en (23) hebben we voor $k=1, 2, \dots, N$

$$(\omega + r(y_k)) D_{y_k} = (\omega + r_k) D_{y_k} = A_k$$

en (25), toegepast voor het speciale geval $y = y_h$, geeft nu (22).

Voor $y \neq y_h$ ($h=1, 2, \dots, N$) is $r(y) = 0$ en volgt uit (25)

$$(26) \quad D_y = K_y - \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{\omega+r_k} A_k$$

Als met (22) de grootheden A_k berekend zijn, dan volgt D_y direct uit (26).

2. Hulpstellingen.

Het is natuurlijk gewenst om voor $\mathcal{L}_j(u, w)$, zoals deze door (21) wordt gedefinieerd, eenvoudiger formules af te leiden. We gebruiken hiervoor het volgende lemma.

Lemma 1. Laten j en k, r en s gehele getallen voorstellen met $j \geq 0$, $r > 0$ en $s > 0$. De reeks

$$(27) \quad \mathcal{L}_{j,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+k+i(r+s)}{j+ir} z^i$$

heeft de convergentiestraal

$$(28) \quad \rho = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{s}\right)^s \left(1 + \frac{s}{r}\right)^r}$$

en voldoet voor $|z| < \rho$ en $z \neq 0$ aan

$$(29) \quad \mathcal{L}_{j,k} = \sum_{m=1}^s \frac{1}{(1-\eta_m)^j \eta_m^k [s-(r+s)\eta_m]} + h_{j,k}(z)$$

met

$$(30) \quad h_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{s}\right]} \binom{mr+j-1}{k-ms} (-1)^{\frac{k+1-ms}{s}} z^m$$

en met $\eta_1, \dots, \eta_s$ als de wortels met de kleinste absolute waarde van de vergelijking

$$(31) \quad (1-\eta)^r \eta^s - z = 0$$

Opm. 1. We stellen steeds $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1)$. Het polynoom $h_{j,k}$ is nul voor $k \leq s-1$. Er geldt de ontwikkeling

$$\frac{t^s}{z-t^s+t^{r+s}} = - \sum_{y=s}^{\infty} z^{-j} h_{j,k}(z^r) t^y$$

waarin j en k de eenduidig bepaalde gehele getallen voorstellen met $kr-jr=y$ en $0 \leq j \leq r-1$ (we denken r en s onderling ondeelbaar). Ontwikkeling van het linkerlid geeft n.l.

$$\frac{t^s}{z} \sum_{n=0}^{\infty} t^{ns} z^{-n} \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} t^{hr}$$

Stellen we voor de exponent $(n+1)s+hr=kr-jr$, dan volgt

$$n+1=mr+j \quad \text{en} \quad h=k-ms$$

waarin m een geheel getal voorstelt. Dus de coëfficiënt van t^{kr-jr}

wordt nu

$$\frac{1}{z} \sum_{\substack{d+j \leq m \leq k \\ d+j \leq m \leq k}} \binom{mr-j-1}{k-m} (-1)^{k-m} z^{-mr-j+1}$$

en mits geldt $0 \leq j \leq r-1$, is die coëfficiënt gelijk aan $-z^{-d} \log_j(z^r)$.

Voor $kr-j's = y \leq s-1$ en $j \leq r-1$ geldt $k \leq s-1$ en is dus $\log_j k = 0$.

Opm. 2. Voor $|x| < \rho$ (met $x \neq 0$) zijn de $r+s$ wortels van (31) alle verschillend en wel zodanig, dat s wortels liggen in de cirkelschijf $|\eta| < \frac{s}{r+s}$ en r wortels in de cirkelschijf $|1-\eta| < \frac{r}{r+s}$. Want wegens

$$(31)' \quad \frac{d}{d\eta} [(1-\eta)^r \eta^s - x] = (1-\eta)^{r-1} \eta^{s-1} [s - (r+s)\eta]$$

kan een dubbele wortel van (30) alleen optreden voor $\eta = 0$, $\eta = 1$ of $\eta = \frac{s}{r+s}$ d.w.z. $x = 0$ of $x = \rho$. Verder zou uit het gelijktijdig gelden van de ongelijkheden

$$|\eta| \geq \frac{s}{r+s} \quad \text{en} \quad |1-\eta| \geq \frac{r}{r+s}$$

voor een wortel η van (31) volgen, dat $|x| \geq \rho$.

Bewijs van lemma 1. De functie $\frac{1}{1-\xi-\eta}$, waarin ξ en η complexe veranderlijken zijn, is regulier voor $|\xi| + |\eta| < 1$ en is aldaar ontwikkelbaar in de absoluut convergente dubbelreeks

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} \xi^m \eta^n$$

Als C_1 de cirkel $|\xi| = R_1$ en C_2 de cirkel $|\eta| = R_2$ voorstelt (beide in positieve zin doorlopen), dan volgt voor $R_1 + R_2 < 1$, dat

$$\binom{m+n}{m} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{1}{1-\xi-\eta} \frac{d\xi}{\xi^{m+1}} \frac{d\eta}{\eta^{n+1}}$$

Zij $R_2 = \frac{s}{r+s}$. Wegens $|x| < \rho = \left(\frac{r}{r+s} \right)^r \left(\frac{s}{r+s} \right)^s$ is dan een getal R_1 te vinden met

$$0 < R_1 < 1 - R_2 = \frac{r}{r+s} \quad \text{en} \quad |x| < R_1^r R_2^s$$

Voor $|\xi| = R_1$ en $|\eta| = R_2$ is nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\xi^k \eta^s} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{x}{\xi^k \eta^s}}$$

gelijkmatig convergent, waaruit volgt

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{1}{1-\xi-\eta} \frac{1}{1-\frac{\eta}{\xi^2 \eta^5}} \frac{d\xi}{\xi^{j+1}} \frac{d\eta}{\eta^{k+1}} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{1}{1-\xi-\eta} \frac{d\xi}{\xi^{j+i+1}} \frac{d\eta}{\eta^{k+i+1}} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+k+i(r+s)}{j+i r} \eta^i = L_{j,k}
 \end{aligned}$$

Teven blijkt, dat de laatste reeks voor $|\eta| < \rho$ steeds convergent is, en dus een convergentiestraal $\geq \rho$ heeft.

Voor $|\xi| \geq R_1$ en $|\eta| = R_2$ geldt $\left| \frac{\eta}{\xi^2 \eta^5} \right| \leq \frac{|\eta|}{R_1^2 R_2^5} < 1$. Voor vastgehouden η met $|\eta| = R_2$ is dus $\frac{1}{1-\frac{\eta}{\xi^2 \eta^5}}$ voor $|\xi| \geq R_1$ een reguliere functie van ξ , terwijl $(1-\xi-\eta)^{-1}$ een pool heeft in het punt $\xi = 1-\eta$ met $|1-\eta| \geq 1-|\eta| = 1-R_2 > R_1$; wegens $j \geq 0$ is de integrand in het eerste lid van (32) regulier in $\xi = \infty$. Uit de residuenrekening volgt nu

$$\begin{aligned}
 (33) \quad L_{j,k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1}{1-\frac{\eta}{(1-\eta)^2 \eta^5}} \frac{1}{(1-\eta)^{j+1}} \frac{d\eta}{\eta^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(1-\eta)^{r-j-1} \eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^2 \eta^5 - \eta} d\eta
 \end{aligned}$$

waarin C_2 de in positieve zin doorlopen cirkel $|\eta| = R_2 = \frac{5}{r+s}$ voorstelt. Uit de opmerking, direct na de formulering van lemma 1, volgt dat voor $0 < |\eta| < \rho$ de noemer $(1-\eta)^2 \eta^5 - \eta$ binnen de cirkel $|\eta| = \frac{5}{r+s}$ precies 5 verschillende nulpunten $\eta_1, \dots, \eta_5$ heeft (juist de nulpunten met kleinste absolute waarde). Wegens $R_2 < 1$ zijn deze nulpunten samen met $\eta = 0$ de enige polen binnen $|\eta| = R_2$ voor de integrand in de laatste integraal. Het residu in een punt η_m ($m = 1, 2, \dots, 5$) is gelijk aan

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{(1-\eta)^{r-j-1} \eta^{s-k-1}}{\frac{d}{d\eta} \{ (1-\eta)^2 \eta^5 - \eta \}} \right]_{\eta=\eta_m} &= \left[\frac{(1-\eta)^{r-j-1} \eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^{r-1} \eta^{s-1} \{ 5-(r+s)\eta \}} \right]_{\eta=\eta_m} \\
 &= \frac{1}{(1-\eta_m)^j \eta_m^k \{ 5-(r+s)\eta_m \}}
 \end{aligned}$$

Om het residu van de integrand in $\eta = 0$ te bepalen ontwikkelen we de integrand volgens

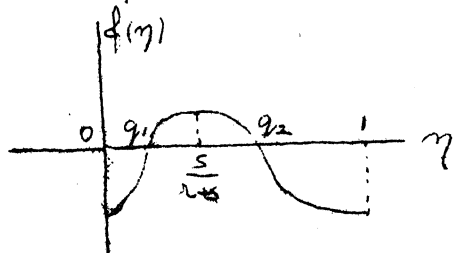
$$\frac{(1-\eta)^{r-j-1} \eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^2 \eta^5 - \eta} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\eta^m} (1-\eta)^{r-m-j-1} \eta^{s-m-k-1}$$

en dit residu is dus gelijk aan

$$b_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\lfloor k/s \rfloor} \binom{mr-j+1}{k+ms} \frac{(-1)^{k+1-ms}}{z^m}$$

Voor $k \leq 5-1$ is dit residu dus nul (en $\eta=0$ een regulier punt voor de integrand). Formule (29) volgt nu direct uit (33) met residuenrekening.

We tonen tenslotte aan, dat de convergentiestraal van de reeks (27) precies ρ is. Zij $f(\eta) = (1-\eta)^\eta \eta^s - z$ en zij z reëel met $0 < z < \rho$. Wegens (31)' en $f(\frac{s}{\lambda+s}) = \rho - z > 0$ heeft in $[0, 1]$ de functie $f(\eta)$ het volgende verloop:



Als z langs de reële as tot ρ nadert, dan naderen q_1 en q_2 tot $\frac{s}{\lambda+s}$, dat voor $z = \rho$ een dubbel nulpunt is van $f(\eta)$. Bij deze limietovergang nadert dus slechts één der wortels η_m van (31) (behorende tot de S kleinste wortels, alle gelegen binnen $|\eta| = \frac{s}{\lambda+s}$) tot $\eta = \frac{s}{\lambda+s}$. Uit (29) volgt nu (zij $\varepsilon > 0$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [L_{j,k}]_{z=\rho-\varepsilon} = \infty,$$

wat impliceert, dat de reeks (27) precies de convergentiestraal ρ heeft.

Opm. Met behulp van de formule van Stirling vindt men voor $i \rightarrow \infty$

$$b_i = \binom{j+k+i(\lambda+s)}{j+ir} = \frac{(1+\frac{s}{\lambda})^{j+ir} (1+\frac{z}{s})^{k+is}}{\sqrt{2\pi \frac{\lambda s}{\lambda+s} i}} (1+O(\frac{1}{i}))$$

en ook hieruit volgt direct, dat ρ juist de convergentiestraal van (27) is.

Lemma 2. Laten j_0, k_0, r, s en gehele getallen zijn met $r > 0$ en $s > 0$ onderling ondeelbaar en met j_0 en k_0 als de kleinste niet-negatieve gehele getallen waarvoor aan $k_0 r - j_0 s = y$ voldaan is.

Later verder r en q positieve getallen zijn met $r+q \leq 1$, evenwel met uitsluiting van het geval, dat tegelijkertijd voldaan is aan

$$r = \frac{r}{r+s} \quad \text{en} \quad q = \frac{s}{r+s}$$

en zij u een complex getal met $0 < |u| \leq 1$. Dan gelden voor f_y ,

zoals door (21) wordt gedefinieerd, de beide volgende formules.

$$(34) \quad \mathcal{F}_y = \frac{w^y}{1-w} (pu)^{j_0} (qu)^{k_0} \left[\sum_{m=1}^s \frac{1}{(1-\eta_m)^{j_0} \eta_m^{k_0} \{s-(r+s)\eta_m\}} + h_{j_0, k_0}^{(1)}(z) \right]$$

en

$$(35) \quad \mathcal{F}_y = \frac{w^y}{1-w} (pu)^{j_0} (qu)^{k_0} \left[\sum_{m=s+1}^{s+r} \frac{1}{(1-\eta_m)^{j_0} \eta_m^{k_0} \{(r+s)\eta_m - s\}} + h_{j_0, k_0}^{(2)}(z) \right]$$

Hierin zijn $\eta_1, \dots, \eta_s$ de s wortels met de kleinste absolute waarde (zelfs gelegen binnen $|\eta| = \frac{s}{r+s}$) en $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ de r wortels met de grootste absolute waarde (zelfs gelegen binnen $|1-\eta| = \frac{r}{r+s}$) van de vergelijking

$$(36) \quad (1-\eta)^r \eta^s = r \quad \text{met} \quad r = (pu)^r (qu)^s$$

Verder is

$$(37) \quad h_{j, k}^{(1)}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{s}\right]} \binom{ms-j+1}{k-ms} \frac{(-1)^{k+1-m}}{r^m}$$

en

$$(38) \quad h_{j, k}^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{j}{r}\right]} \binom{ms-k-1}{j-m} \frac{(-1)^{j+1-m}}{r^m}$$

In verband met de nauwkeurige definitie van $\mathcal{F}_y$, moet men voor $y=0$ de rechterleden van (34) en (35) verminderen met $\frac{w}{1-w}$.

Bewijs. Wegens de aan p , q en u opgelegde voorwaarden, geldt voor $r = (pu)^r (qu)^s$, dat $|r| < \rho$ waarin ρ volgens (28) is gedefinieerd. Formule (34) volgt nu onmiddellijk uit lemma 1. Past men lemma 1 toe na verwisseling van r en s resp. j en k dan volgt

$$\mathcal{F}_y = \frac{w^y}{1-w} (pu)^{j_0} (qu)^{k_0} \left[\sum_{m=1}^r \frac{1}{(1-\zeta_m)^{j_0} \zeta_m^{k_0} \{r-(r+s)\zeta_m\}} + h_{j_0, k_0}^{(2)}(z) \right]$$

waarin $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ de wortels zijn met de kleinste absolute waarde van de vergelijking

$$(1-\zeta)^s \zeta^r = r$$

De substitutie $r = 1-\eta$ geeft nu formule (35).

Opm. Wanneer $y \geq 0$, dan geldt steeds $0 \leq j_0 \leq r-1$ en $0 \leq k_0$, en in dat geval is de extra term $h_{j_0, k_0}^{(2)}$ in (35) nul. Evenzo vervalt voor $y \leq 0$ in (34) de term $h_{j_0, k_0}^{(1)}$. Bij toepassing van de ontwikkelde methode in de sequentieanalyse, zal in het algemeen gelden

ofwel $n \ll s$, ofwel $s \ll n$; zij $s \propto n$. De berekening van de s kleinste wortels $\eta_1, \dots, \eta_s$ van de vergelijking (36) is dan niet zeer bezwaarlijk, doch wel de berekening van de zeer vele wortels $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+n}$ met grootste absolute waarde. Door uitsluitend gebruik te maken van formule (34) kan men evenwel deze laatste berekening vermijden.

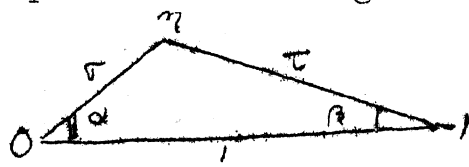
In verband met lemma 2 en de opmerking gemaakt na formule (12) is het van bijzonder belang de wortels te bepalen van de vergelijking

$$(1-\eta)^n \eta^s = r^n q^s$$

Hierin geldt voor $r = r^n q^s$, dat $0 \leq r \leq 1$ en we moeten dus voor elke reële waarde r met $0 \leq r \leq 1$ de wortels bepalen van de vergelijking

$$(39) \quad (1-\eta)^n \eta^s = r$$

Dit is vrij gemakkelijk. Daar de niet reële wortels van (36) in geconjugeerde paren voorkomen, behoeven we alleen de wortels te bepalen met niet-negatief reeel deel. Stel nu



$\eta = r e^{i\alpha} \quad \text{en} \quad 1-\eta = \tau e^{-i\beta}$
 met
 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq \pi \quad (40)$

Voor een wortel η van (39) geldt dus

$$(41) \quad \tau^n e^{-i n \beta} r^s e^{i s \alpha} = r$$

Daar r reeel is volgt $\sin(s\alpha - n\beta) = 0$ ofwel voor k geheel

$$(42) \quad s\alpha - n\beta = k\pi$$

Uit (40) volgt dat voor de gehele waarde k geldt

$$(43) \quad -\frac{1}{2}n \leq k \leq \frac{1}{2}s$$

Door toepassing van de sinusregel op de getekende driehoek volgt verder

$$(44) \quad r = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

en wegens (41) hebben we dan

$$(45) \quad \frac{(\sin \alpha)^s (\sin \beta)^n}{(\sin(\alpha + \beta))^{n+s}} = r$$

Men kiest nu een waarde α met $0 \leq \alpha \leq \pi$ en verder een gehele waarde k , die aan (43) voldoet. Met (42) berekent men nu β , met (44)

de waarden ζ en $\bar{\zeta}$ en tenslotte uit (43) de waarde van z , waarvoor het gevonden getal $\eta = \zeta e^{i\alpha}$ voldoet aan vergelijking (36). Alle berekeningen kunnen logaritmisch geschieden. Eist men geen grote nauwkeurigheid, dan is het wellicht eenvoudiger de wortels van (39) grafisch te bepalen, door in het complexe η -vlak de eindig vele krommen te tekenen met vergelijking (42) en verder een schaar van krommen met vergelijking (39).

Opm. Door de substitutie

$$\eta = z^{\frac{1}{5}} w^{-2}$$

kan men ook de berekening van de wortels van vergelijking (39) herleiden tot de berekening van de wortels van de trinomische vergelijking

$$w^{2+5} - w^2 + z^{\frac{1}{5}} = 0$$

Wanneer $z^{\frac{1}{5}}$ reeel is, dan bepaalt men de reele wortels gemakkelijk met behulp van de optellingslogarithmen ingevoerd door Gauss. Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I p. 391-399.

Beschouw de algebraïsche functie $\eta(z)$ gedefinieerd door (36). Het Riemannoppervlak $\mathcal{F}$ van $\eta(z)$ heeft twee vertakkingspunten A en B in $z=0$ op hoogte $\eta=0$ resp. $\eta=1$ (resp. 5-bladig en 2-bladig). Verder heeft $\mathcal{F}$ een tweebladig vertakkingspunt C in $z=\rho$ op hoogte $\frac{5}{2+5}$ en een $(r+5)$ -bladig vertakkingspunt $\bar{C}$ gaat één door het punt A, en één door het punt B (v.g.l. het slot van het bewijs van lemma 1). Beschouw nu op $\mathcal{F}$ de functie $\eta(z)$ in de omgeving van het 5-bladige vertakkingspunt A en stel $z = \zeta^5$. Omloopt ζ de oorsprong éénmaal in een kleine cirkel, dan omloopt z de oorsprong 5 maal, en heeft $\eta(z) = \eta(\zeta^5)$ weer de zelfde waarde. Doorloopt ζ éénmaal een gesloten, O niet omvattende Jordankromme gelegen binnen $|\zeta| = \rho^{\frac{1}{5}}$ dan omloopt z éénmaal een analoge kromme binnen $|z| = \rho$ en herneemt $\eta(z) = \eta(\zeta^5)$ zijn oorspronkelijke waarde. Dus de functie $\eta(\zeta^5)$ is éénduidig regulier voor $|\zeta| < \rho^{\frac{1}{5}}$. Omloopt z eenmaal het punt $z = \rho$ dan doorloopt het bijbehorend punt op de door C gaande bladen van $\mathcal{F}$ een niet gesloten weg. Als dus ζ het overeenkomstige randpunt $\rho^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}}$ omloopt, dan herneemt $\eta(\zeta^5)$ niet zijn oorspronkelijke waarden d.w.z. deze functie heeft een singulariteit in genoemd randpunt. De reeks van Puiseux

$$(46) \quad \eta(\zeta^5) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$$

$\mathcal{F}$ in het oneindige. Van de twee bladen door het punt C

heeft dus een convergentiestraal $\rho^{\frac{1}{s}}$. Substitueert men voor $|z| < \rho$ in (46)

$$z = \rho^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2\pi i k}{s}} \quad (k=0, 1, \dots, s-1)$$

dan vindt men juist de s wortels $\eta_1, \dots, \eta_s$ van vergelijking (39) met de kleinste absolute waarde. Voor de berekening van deze wortels is het dus van groot belang de coëfficiënten b_n te kennen.

We definiëren de functie $(1-\eta)^{\frac{1}{s}}$ zodanig, dat voor $0 < \eta < 1$ geldt $0 < (1-\eta)^{\frac{1}{s}} < 1$. Uit (39) volgt dan

$$\eta(1-\eta)^{\frac{1}{s}} = z$$

waarin z één der wortels voorstelt van de binomiaalvergelijking $z^s = \eta$. Nu geldt (v.g.l. A. Hurwitz und R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie p. 136-138):

Lemma 3. (Stelling van Lagrange Bürmann). Zij voor $Q_1 \neq 0$

$$(47) \quad z = \mathcal{P}(\eta) = Q_1 \eta + Q_2 \eta^2 + Q_3 \eta^3 + \dots$$

een voor $|\eta| \leq R$ convergente machtreeks, met $\mathcal{P}(\eta) \neq 0$ voor $0 < |\eta| < R$. Zij verder

$$(48) \quad M = \min_{|\eta|=R} |\mathcal{P}(\eta)|$$

Dan behoort bij elke waarde z met $|z| < M$ één en slechts één waarde η met $|\eta| < R$, waarvoor (47) geldt. Deze waarde η is een reguliere functie van z , en wel geldt (voor $|z| < M$)

$$(49) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left(\frac{\eta}{\mathcal{P}(\eta)} \right) \right]_{\eta=0}$$

Voor $\mathcal{P}(\eta) = \eta(1-\eta)^{\frac{1}{s}}$ en $R = \frac{s}{s+1}$ is aan de voorwaarden van lemma 3 voldaan. De door (48) gedefinieerde minimale waarde M wordt aangenomen voor $\eta = \frac{s}{s+1}$ en is gelijk aan $\rho^{\frac{1}{s}}$. Uit de bewering van lemma 3 volgt nu voor $|z| < \rho^{\frac{1}{s}}$

$$(50) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

met

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} (1-\eta)^{-\frac{n}{s}} \right]_{\eta=0} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{-\frac{n}{s}}{n-1}$$

ofwel

$$(51) \quad b_n = \frac{n! (n+1)(n+2) \dots (n+(n-1)s)}{s^{n-1} n!}$$

Men kan bewijzen, dat een van n onafhankelijke positieve constante C bestaat met

$$|b_n| < C \frac{(1 + \frac{2}{s})^n (1 + \frac{5}{s})^{\frac{1}{s}n}}{n\sqrt{n}} = \frac{C}{n\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\rho^{\frac{1}{s}}}\right)^n$$

Hieruit volgt, dat de reeks (50) zelfs convergeert voor $|z| \leq \rho^{\frac{1}{s}}$. De gevonden resultaten vatten we nu samen in

Lemma 4. Zij $|z| \leq \rho^{\frac{1}{s}}$. De s wortels $\eta_1, \dots, \eta_s$ van de vergelijking

$$(52) \quad (1 - \eta)^r \eta^s = z$$

met de kleinste absolute waarde worden gegeven door de voor $|z| \leq \rho^{\frac{1}{s}}$ convergente machtreeks

$$(53) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

waarin b_n door (47) is gedefinieerd, en waarin z één van de s wortels voorstelt van de vergelijking $z^s = z$.

Opm. Een analoge ontwikkeling bestaat natuurlijk voor de r wortels $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ van (52) met de grootste absolute waarde. Lemma 2 en 4 hebben tot doel de numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen (22) te vergemakkelijken. Voor $z^s = z = (\mu)^r (q\mu)^s$ is de convergentiesnelheid in (21) en (53) ongeveer gelijk (de convergentiestralen zijn n.l. ρ resp. $\rho^{\frac{1}{s}}$) en de berekening van een wortel van (52) resp. de berekening van $\mathcal{F}_y(u, v)$ vergt dus ongeveer evenveel tijd. Gebruik makend van lemma 2 en 4 behoeft men voor de berekening van de in (22) voorkomende grootheden $\mathcal{F}_y(u, v)$ ten hoogste r maal een reeks te sommeren (v.g.l. de opmerking na lemma 2). Direct combinatie van (21) en (22) vereist in het algemene geval, dat men ongeveer N^2 maal een reeks sommeert, en deze methode is dus alleen voor kleine waarden van N aan te bevelen.

3. Toepassingen.

Bij toepassing van de aangegeven methode in de sequentieanalyse kan men ν interpreteren als de kans, die er bij elke stap bestaat, dat de test door onvoorziene omstandigheden moet worden afgebroken. We zullen voortaan voor het gemak aannemen, dat

$$\nu = 0 \quad \text{en dus} \quad p + q = 1$$

I. We beschouwen vooreerst het klassieke probleem, waarin $k = s = 1$, en waarin R twee componenten R_1 en R_2 heeft, bestaande uit de verzameling van alle roosterpunten op de lijn $y = a$ resp. $y = -b$. Hier in stellen a en b gehele positieve getallen voor.

Voor de gehele getallen j_0 en k_0 genoemd in de formulering van lemma 2 geldt nu

$$\begin{array}{llll} k_0 = y & \text{en} & j_0 = 0 & \text{als} & y \geq 0 \\ k_0 = 0 & " & j_0 = -y & " & y \leq 0 \end{array}$$

In het eerste geval gebruiken we formule (35) van lemma 2 en vinden dan voor $y \geq 0$

$$R_y = w^y (q\mu)^y \frac{1}{\eta_2^y (2\eta_2 - 1)}$$

en analoog met formule (34) voor $y \leq 0$

$$R_y = w^y (p\mu)^{-y} \frac{1}{(1-\eta_1)^{-y} (1-2\eta_1)}$$

Hierin stelt η_1 , resp. η_2 de absoluut grootste resp. absoluut kleinste wortel voor de vergelijking

$$(1+\eta)\eta = pq\mu^2$$

Zij u reeel met $0 \leq u \leq 1$. Dan geldt voor

$$u = \sqrt{1-4qp\mu^2}$$

dat

$$1-\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}(1+u)$$

en verder

$$2\eta_2 - 1 = 1 - 2\eta_1 = u$$

en dus volgt voor $y \geq 0$

$$(54) \quad R_y = w^y \cdot \frac{1}{u} \left[\frac{2q\mu}{1+u} \right]^y$$

en voor $y \leq 0$

$$(55) \quad \mathcal{K}_y = w^2 \frac{1}{U} \left[\frac{2\mu}{1+U} \right]^{-y}$$

Het stelsel vergelijkingen (22) wordt in ons geval

$$\mathcal{K}_a = \left(\frac{1-x_1}{x_1} + \mathcal{K}_0 \right) A_1 + \mathcal{K}_{a+b} A_2$$

$$\mathcal{K}_b = \mathcal{K}_{-a-b} A_1 + \left(\frac{1-x_2}{x_2} + \mathcal{K}_0 \right) A_2$$

Stellen we $w=1$, dan gaat wegens (54) en (55) dit stelsel na vermenigvuldiging met U over in

$$\left[\frac{2\mu}{1+U} \right]^a = \left(\frac{1-x_1}{x_1} (U+1) \right) A_1(u,1) + \left[\frac{2\mu}{1+U} \right]^{a+b} A_2(u,1)$$

$$\left[\frac{2\mu}{1+U} \right]^b = \left[\frac{2\mu}{1+U} \right]^{a+b} A_1(u,1) + \left(\frac{1-x_2}{x_2} (U+1) \right) A_2(u,1)$$

Rekening houdende met

$$4\mu q u^2 = 1 - (1-4\mu q u^2) = 1 - U^2$$

vinden we als oplossing van dit tweetal vergelijkingen

$$(56) \quad A_1(u,1) = (2\mu)^a \frac{\left(\frac{1-x_2}{x_2} (U+1) \right) (1+U)^b - (1-U)^b}{\left(\frac{1-x_1}{x_1} (U+1) \right) \left(\frac{1-x_2}{x_2} (U+1) \right) (1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

en

$$(57) \quad A_2(u,1) = (2\mu)^a \frac{\left(\frac{1-x_1}{x_1} (U+1) \right) (1+U)^a - (1-U)^a}{\left(\frac{1-x_1}{x_1} (U+1) \right) \left(\frac{1-x_2}{x_2} (U+1) \right) (1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

Voor algemene x_1 en x_2 zijn dit irrationale functies van u .

Wegens (9) geldt hierin voor $j=1,2$

$$(58) \quad A_j(u,1) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{j,l} u^l$$

waarin $\alpha_{1,l}$ resp. $\alpha_{2,l}$ de kans voorstelt, dat na een door $\mathcal{R}$ gestoorde wandeling vanaf de oorsprong een catastrofe optreedt en het randpunt (a,l) van $\mathcal{R}_1$ resp. het randpunt $(-b,l)$ van $\mathcal{R}_2$. Dus $A_j(1,1)$ is de kans, dat op de component $\mathcal{R}_j$ een catastrofe optreedt. Wanneer W in een randpunt op de lijn $y=a$ resp. $y=-b$ arriveert, dan is de kans op een catastrofe in dat randpunt x_1 resp. x_2 .

Ia. Voor $x_2=0$ is wegens (56) en (57) $A_2(u,1)=0$ en

$$(59) \quad A_1(u,1) = \left(\frac{2\mu}{1+U} \right)^a \frac{1}{\frac{1-x_1}{x_1} (U+1)}$$

Wegens $p+q=1$ geldt voor $u \neq 1$

$$(60) \quad U = \sqrt{1-4pq} = 1-2p \quad \text{als } p \leq q \\ = 1-2q \quad \text{" } q \leq p$$

en de kans op een catastrofe wordt dus

$$A_1(1,1) = \frac{1}{1+(1-2p)\frac{1-x_1}{x_1}} \quad \text{als } p \leq q$$

of

$$A_1(1,1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(1-2q)\frac{1-x_1}{x_1}} \quad \text{als } q \leq p$$

Teneinde de door (59) gegeven functie volgens (58) te ontwikkelen, stellen we

$$1-U = 1-\sqrt{1-4pq}u^2 = 2\eta$$

en dus is voldaan aan

$$z = pq u^2 = \eta(1-\eta)$$

Uit de algemene stelling van Lagrange-Bürmann (een generalisatie van lemma 3) volgt, dat we een in $\eta=0$ reguliere functie $f(\eta)$ kunnen ontwikkelen naar opklimmende machten van η

$$f(\eta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[f'(\eta) \left(\frac{\eta}{\eta(1-\eta)} \right)^n \right]_{\eta=0}$$

Passen we deze formule toe op de functie (59), dan vinden we

$$A_1(u,1) = \left(\frac{q^u}{1-\eta}\right)^a \frac{x_1}{1-2(1-x_1)\eta} \\ = (q^u)^a x_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left\{ \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{(1-\eta)^a} \frac{1}{1-2(1-x_1)\eta} \right) \left(\frac{1}{1-\eta} \right)^n \right\} \right]_{\eta=0} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{1,a+2n} u^{a+2n}$$

waarin $\alpha_{1,a} = (q^u)^a x_1$, en waarin voor $n \geq 1$

$$\alpha_{1,a+2n} = \frac{p^n q^{a+n}}{n!} x_1 \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{(1-\eta)^a} \frac{1}{1-2(1-x_1)\eta} \right) \left(\frac{1}{1-\eta} \right)^n \right]_{\eta=0}$$

In het bijzondere geval $x_1 = 1$ vinden we

$$\alpha_{1,a+2n} = \frac{p^n q^{a+n}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[a \left(\frac{1}{1-\eta} \right)^{a+n+1} \right]_{\eta=0} \\ = \frac{a(a+n+1)(a+n+2) \cdots (a+2n-1)}{n!} p^n q^{a+n}$$

als de kans, dat in het punt $(\eta, y) = (a+2n, a)$ een catastrofe optreedt.

De punten $(a+2n+1, 0)$ zijn vanaf de oorsprong onbereikbaar.

Ib. Nemen we nu aan, dat $r_1 = r_2 = 1$, dan volgt uit (56) en (57)

$$(61) \quad A_1(u, 1) = (2qu)^a \frac{(1+u)^b - (1-u)^b}{(1+u)^{a+b} - (1-u)^{a+b}}$$

en

$$(62) \quad A_2(u, 1) = (2qu)^a \frac{(1+u)^a - (1-u)^a}{(1+u)^{a+b} - (1-u)^{a+b}}$$

Dat zijn beide rationale functies in u^2 en dus in u . Wegens (60) worden de kansen op een catastrofe op R_1 en R_2

$$(63) \quad A_1(1, 1) = q^a \frac{r^b - q^b}{r^{a+b} - q^{a+b}} \quad \text{resp.} \quad A_2(1, 1) = r^b \frac{r^a - q^a}{r^{a+b} - q^{a+b}}$$

een resultaat, dat overigens veel eenvoudiger kan worden bewezen (v.g.l. J.V. Uspensky, Introduction to mathematical probability, blz. 141).

Met partiaalbreuk-splitsing kan men de functies (61) en (62) volgens (58) ontwikkelen, doch dit laten we nu achterwege. Onder de voorwaarde, dat een catastrofe optreedt op de randlijn $y = a$ wordt de gemiddelde weglengte gegeven door

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{A_1(1, 1)} \left[\frac{d}{du} A_1(u, 1) \right]_{u=1}$$

Wegens $\frac{du}{du} = -\frac{4rqqu}{u}$ geldt dus

$$\bar{n}_1 = a + \frac{(2q)^a}{A_1(1, 1)} \left[-\frac{4rq}{u} \frac{d}{du} \frac{(1+u)^b - (1-u)^b}{(1+u)^{a+b} - (1-u)^{a+b}} \right]_{u=1-2q}$$

waarmee $\bar{n}_1$ expliciet bekend is.

II. Zij nu $S = 1$ en r een willekeurig natuurlijk getal. Laat de rand R bestaan uit de roosterpunten gelegen op de lijn $y = -b$, waarin b een positief geheel getal voorstelt. Het stelsel vergelijkingen (22) reduceert zich (voor $v = 0$) tot de vergelijking

$$\bar{R}_{-b} = \left(\frac{1-r_1}{r_1} + \bar{R}_0 \right) A_1$$

waaruit volgt

$$(64) \quad A_1 = \frac{\bar{R}_{-b}}{\frac{1-r_1}{r_1} + \bar{R}_0}$$

Voor $y \leq 0$ geldt voor het paar kleinste niet-negatieve gehele getallen j_0 en k_0 met

$$y = k_0 r - j_0 s = k_0 r - j_0$$

dat $k_0 = 0$ en $j_0 = -y$. Uit formule (34) van lemma 2 volgt dan voor $y \leq 0$

$$(65) \quad \mathcal{K}_y = w^y (ru)^{-y} \frac{(1-\eta_1)^y}{1-(r+1)\eta_1},$$

waarin η_1 de wortel met de kleinste absolute waarde voorstelt van de vergelijking

$$(66) \quad (1-\eta)^r \eta = (ru)^r q.$$

Uit (64) en (65) volgt dan voor $w = 1$

$$(67) \quad A_1(u, 1) = (ru)^b \frac{(1-\eta_1)^{-b}}{\frac{1-r_1}{r_1} \{1-(r+1)\eta_1\} + 1}$$

en de kans op een catastrofe wordt dus gegeven door

$$(68) \quad A_1(1, 1) = \left(\frac{r}{1-\eta_1} \right)^b \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1-r_1}{r_1} (r+1)\eta_1}$$

met $\eta_1 = \eta_1(u=1)$ als de absoluut kleinste wortel van

$$(1-\eta)^r \eta = (1-q)^r q$$

Uit de redenering uit het slot van het bewijs van lemma 1 volgt dat η_1 reeel positief is met $\eta_1 \leq \frac{1}{r+1}$. Voor $q \leq \frac{1}{r+1}$ is $\eta_1 = q$ en de kans (67) op een catastrofe wordt dan

$$\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1-r_1}{r_1} (r+1)q}$$

Voor $r_1 = 1$ is deze kans 1. Dit is voor $q < \frac{1}{r+1}$ ook om andere redenen duidelijk. Immers de verwachtingswaarde van de bij elke stap naar boven afgelegde afstand is

$$qr - r = q(r+1) - 1$$

en deze is voor $q < \frac{1}{r+1}$ negatief. De waarschijnlijkheid, dat W nooit de lijn $y = -b$ ontmoet, is dan nul, en dus (voor $r_1 = 1$) ook de kans dat nooit een catastrofe zal optreden.

Voor $r_1 = 1$ volgt uit (67)

$$A_1(u, 1) = \left(\frac{ru}{1-\eta_1} \right)^b$$

met η , als absoluut kleinste wortel van (66). Als vroeger volgt nu uit de stelling van Lagrange-Bürmann

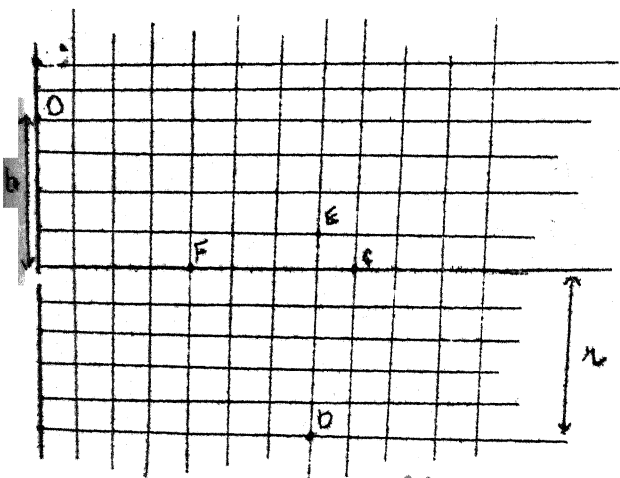
$$A_1(u,1) = (pu)^b \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^r q u^{r+1})^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left\{ \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{1-\eta} \right)^b \left(\frac{\eta}{(1-\eta)^{r+1}} \right)^n \right\} \right]_{\eta=0}$$

$$= (pu)^b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(b+1+rn)(b+2+rn) \dots (b+n-1+rn)}{n!} (pu)^{b+nr} (qu)^r$$

en dus volgt voor de kans α_n op een catastrofe in het randpunt $(n,y) = (b+n(r+1), b)$, $\alpha_0 = p^b$ en voor $n \geq 1$

$$(69) \quad \alpha_n = \frac{b(b+1+rn)(b+2+rn) \dots (b+n-1+rn)}{n!} p^{b+nr} q^n$$

Het is belangwekkend, dat formule (69) zeer eenvoudig en anschouwelijk als volgt kan worden bewezen.



Onder een weg verstaan we een eindige of oneindige rij punten (x_j, y_j) ($j = 0, 1, 2, \dots$) met $(x_0, y_0) = (0, 0)$ zodat voor elke waarde $j = 0, 1, \dots$ één der volgende relaties geldt

$$(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + 1, y_j + r)$$

$$\text{resp. } (x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + 1, y_j - 1)$$

Zij C een bereikbaar randpunt op $y = -b$, dus met coördinaten $x = b + k(r+1)$ en $y = -b$ (met k als een niet-negatief getal). Het aantal wegen met C als eindpunt is $d_k = \binom{b+k(r+1)}{k}$. Om het aantal

e_k wegen te bepalen met C als eindpunt en enig randpunt, moeten we d_k verminderen met het aantal e_k in C eindigende wegen, die tevoren reeds een randpunt F zijn gepasseerd, d.w.z. $e_k = d_k - e_k$.

Elke in C eindigende weg heeft D of E als voorlaatste punt met

$$D = (b + k(r+1) - 1, -b + r)$$

$$E = (b + k(r+1) - 1, -b + 1)$$

Dus is $e_k = N_D + N_E$ als N_D resp. N_E het aantal in D resp. E eindigende wegen voorstelt, die de rand minstens éénmaal gepasseerd zijn. Daar elke in D eindigende weg de rand $y = -b$ noodzakelijk eens moet hebben gepasseerd, hebben we

$$N_D = \binom{b + k(r+1) - 1}{k-1}$$

We laten nu zien, dat $N_E = r N_D$. Een weg, die E passert, en tevoren de rand is gepasseerd, heeft in zeker randpunt F met

$$F = (b + j(r+1), -b)$$

waarin $j \in \{0, \dots, k-1\}$, deze rand voor het eerst getroffen. Het aantal geheel vrije mogelijkheden om van F naar E te komen is

$$N_E^{(j)} = \binom{(n-j)(r+1)-1}{n-j}$$

en analoog

$$N_D^{(j)} = \binom{(n-j)(r+1)-1}{n-j+1}$$

en het blijkt nu, dat geldt

$$N_E^{(j)} = r N_D^{(j)} \quad (j=0, 1, \dots, k-1)$$

Dus volgt

$$N_E = \sum_{j=0}^{k-1} Q_j N_E^{(j)} = r \sum_{j=0}^{k-1} Q_j N_D^{(j)} = r N_D$$

We hebben nu

$$\begin{aligned} Q_k &= d_k - e_k = d_k - N_D - N_E = d_k - (r+1) N_D \\ &= \binom{b + k(r+1)}{k} - (r+1) \binom{b + k(r+1)-1}{k-1} \\ &= \frac{a}{k} \binom{b + k(r+1)-1}{k-1} \end{aligned}$$

en de kans α_k op een catastrofe in het punt $C = (b + k(r+1), -b)$ is dus

$$\alpha_k = Q_k p^{b+kr} q^k = \frac{a(b+1+rk)(b+2+rk) \dots (b+k-1+rk)}{k!} p^{b+kr} q^k$$

wat juist formule (69) is.

III. We geven nu een tweede toepassing voor het geval, dat $S=1$ en dat r een willekeurig natuurlijk getal is. Laat de rand $\mathcal{R}$ bestaan uit N componenten $\mathcal{R}_h$, waarbij $\mathcal{R}_h$ ($h = 0, 1, 2, \dots, N-1$) bestaat uit de verzameling van alle (bereikbare) roosterpunten op de lijn $y = a + h$, waarin a een positief geheel getal is. Zij verder $r_h = 1$ voor $h = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Indien $N > r$, dan kunnen de componenten $\mathcal{R}_h, \mathcal{R}_{h+1}, \dots, \mathcal{R}_{N-1}$ alleen bereikt worden vanaf de oorsprong door tenminste één der componenten $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{h-1}$ te passeren, doch dan treedt onherroepelijk een catastrofe op wegens $r_h = 1$. De componenten $\mathcal{R}_h$ met $h \geq r$ kunnen dus buiten beschouwing worden gelaten, en we mogen aannemen, dat $N \leq r$.

Het stelsel vergelijkingen (22) krijgt in ons geval de gedaante

$$(70) \quad \mathcal{F}_{a+h} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_{h-k} A_k \quad (h=0, 1, \dots, N-1)$$

Voor $y \leq 0$ wordt $\mathcal{F}_y$ gegeven door de formule (65). Voor $y \geq 0$ geldt voor de in lemma 2 genoemde getallen j_0 en k_0 , dat $k_0 = \left\{ \frac{y}{r} \right\}$ en $j_0 = rk_0 - y$, als $\{x\}$ het kleinste gehele getal $\geq x$ voorstelt. Uit formule (34) van lemma 2 volgt nu voor $y \geq 0$

$$(71) \quad \mathcal{F}_y = w^y (pu)^{rk_0+y} (qu)^{k_0} \left[\frac{1}{(1-\eta_1)^{rk_0+y} \eta_1^{k_0} \{1-(r+1)\eta_1\}} + \sum_{m=1}^{k_0} \binom{y-(k_0-m)r-1}{k_0-m} \frac{(-1)^{k_0-m+1}}{(r^r q u^{r+1})^m} \right],$$

waarin $k_0 = \left\{ \frac{y}{r} \right\}$ en waarin η_1 de absoluut kleinste wortel van (66) voorstelt. Wegens (65) geldt formule (71) ook voor $y \leq 0$, mits we in dit geval $k_0 = 0$ stellen (de som in het rechterlid van (71) is nu leeg).

Wegens $N \leq r$ geldt voor de coëfficiënten $\mathcal{F}_{h-k}$ in het stelsel vergelijkingen (70), dat $|h-k| \leq r-1$. Nu wordt $\mathcal{F}_y$ voor $y \leq 0$ gegeven door (65) en voor $0 < y \leq r$ door (71) met $k_0 = 1$. Dus

$$(72) \quad \mathcal{F}_y = w^y (pu)^{-y} \frac{(1-\eta_1)^y}{1+(r+1)\eta_1}$$

als $y \leq 0$ en

$$(73) \quad \mathcal{F}_y = w^y (pu)^{r-y} qu \left[\frac{1}{(1-\eta_1)^{r-y} \eta_1 \{1-(r+1)\eta_1\}} - \frac{1}{r^r q u^{r+1}} \right]$$

als $0 < y \leq r$, waarbij we gebruik maakten van (66). We stellen nu

$$(74) \quad \frac{w}{pu} (1 - \eta_1) = x; \quad \frac{w}{pu} = y; \quad 1 - (r+1)\eta_1 = x.$$

De matrix Δ_N van het stelsel vergelijkingen (70) wordt gegeven door

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} k_0 & k_{-1} & k_{-2} & \dots & k_{-N+1} \\ k_1 & k_0 & k_{-1} & \dots & k_{-N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N-1} & k_{N-2} & \dots & k_1 & k_0 \end{vmatrix}$$

en is wegens (72) en (73) gelijk aan

$$\frac{1}{x} \begin{vmatrix} 1 & x^{-1} & x^{-2} & x^{-3} & \dots & x^{-N+1} \\ x - \alpha y & 1 & x^{-1} & x^{-2} & \dots & x^{-N+2} \\ x^2 - \alpha y^2 & x - \alpha y & 1 & x^{-1} & \dots & x^{-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{N-1} - \alpha y^{N-1} & x^{N-2} - \alpha y^{N-2} & \dots & x - \alpha y & 1 & x^{-1} \end{vmatrix}$$

We transformeren Δ_N in een nieuwe matrix Δ'_N door de laatste kolom vermenigvuldigd met x^{N-k} af te trekken van de k-de kolom ($k=1, 2, \dots, N-1$). Door deze operatie, wordt noch de determinant van de matrix, noch de minor van een niet tot de laatste kolom behorend element, gewijzigd. We vinden

$$\Delta'_N = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^{-N+1} \\ -\alpha y & 0 & 0 & \dots & 0 & x^{-N+2} \\ -\alpha y^2 & -\alpha y & 0 & \dots & 0 & x^{-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha y^{N-1} & \alpha y^{N-2} & \dots & -\alpha y & 1 & x^{-1} \end{vmatrix}$$

Zij $M_{i,k}$ de minor (d.w.z. onderdeterminant met teken) van het element uit de i^{de} rij en k^{de} kolom van $\Delta_N^{(k)}$. Deze is gelijk aan de overeenkomstige minor van Δ_N (we veronderstellen nog steeds $k \neq N$). Voor $2 \leq i \leq k-1$ bevat de matrix van $M_{i,k}$ een kolom nullen en is dus $M_{i,k} = 0$. Hetzelfde geldt voor $k+2 \leq i \leq N$. Verder ziet men gemakkelijk in, dat de volgende formules gelden.

$$(76) \quad M_{1,k} = \alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} x^{k-1} y^{-1} (x-y) \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$= \alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} x y^{-1} \quad \text{voor } k = 1$$

$$(77) \quad M_{N,k} = \alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$= \alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} x y^{-1} \quad \text{voor } k = 1 \text{ en } k = N$$

$$(78) \quad M_{k+1,k} = -\alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} y^{-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, N-1$$

Het k^{de} element in de eerste rij van Δ_N is gelijk aan $\alpha^{-1} x^{-k+1}$. Dus hebben we

$$\alpha^{-1} \sum_{k=1}^N x^{-k+1} M_{1,k} = |\Delta_N| \cdot \alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1}$$

en wegens (76) volgt nu

$$(79) \quad M_{1,N} = -\alpha^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{N-1} x^{N-1} y^{-1} \{x - \alpha y + (N-2)(x-y)\}$$

Daar de matrix Δ_N symmetrisch is t.o.v. de nevendiagonaal, geldt

$$M_{i,k} = M_{N-k+1, N-i+1}$$

en zijn alle minoren van Δ_N nu bekend. In verband met de oplossing van het stelsel (70) interesseert ons vooral de inverse matrix $(\Delta_N)^{-1}$ van Δ_N , welke de gespiegelde is van de matrix $\left(\frac{M_{i,k}}{|\Delta_N|} \right)$. Wegens de formules (75) tot (79) heeft deze de gedaante

$$\begin{array}{c}
 \Delta_{N-1}^* \\
 \left| \begin{array}{cccc}
 xy^{-1} & \dots & -y^{-1} & 0 \\
 xy^{-1}(x-y) & & 1 & -y^{-1} \\
 x^2y^{-1}(x-y) & & 0 & 1 \\
 \vdots & & & \vdots \\
 x^{N-2}y^{-1}(x-y) & & & 0 \\
 -x^{N-1}y^{-1}\{x-xy+(N-2)(x-y)\} & & x^{N-2}y^{-1}(x-y) & -xy^{-1}
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

De oplossing van het stelsel (70) wordt dus

$$\begin{aligned}
 A_0 &= xy^{-1} F_a = y^{-1} F_{a+1} \\
 (80) \quad A_k &= x^k y^{-1} (x-y) F_a + F_{a+k} y^{-1} F_{a+k-1} \quad (k=1, 2, \dots, N-2) \\
 A_{N-1} &= -x^{N-1} y^{-1} \{x-xy+(N-2)(x-y)\} F_a + xy^{-1} F_{a+N-1} \\
 &\quad + \sum_{h=1}^{N-2} x^{N-h-1} y^{-1} (x-y) F_{a+h}
 \end{aligned}$$

Hiermee is het gestelde probleem in principe opgelost; $A_k(1,1)$ is de kans, dat op de component R_k een catastrofe optreedt. Gebruik makend van (71) en (74) vinden we deze kans als een eenvoudige uitdrukking in de absoluut kleinste wortel η_1 van

$$(1-\eta)^2 \eta = \tau^2 q$$

(voor $q \leq \frac{1}{\tau+1}$ geldt weer $\eta_1 = q$).

Opm. Uit (80) volgt, dat voor $k \leq N-1$ de randontwikkeling A_k (bij de randcomponent R_k bestaande uit alle bereikbare roosterpunten op de lijn $y = a+k$) en dus ook de kans, dat op R_k een catastrofe optreedt, onafhankelijk is van N . Dit is achteraf ook duidelijk. Immers, als $k \leq N-1$, dan behoort de lijn $y = a+k+1$ tot de rand, en wanneer W in een punt van deze lijn arriveert, dan treedt onherroepelijk een catastrofe op. Dit betekent, dat W vanaf een punt (n, y) met $y \geq a+k+2$ onmogelijk de lijn $y = a+k$ kan bereiken, daar W in benedenwaartse richting alleen stappen ter lengte 1 kan maken. Het al of niet aanwezig zijn van randlijnen $y = a+k$ met $k \geq k+2$ is dus onverschillig

wat betreft de kans op een catastrofe in een punt van de lijn $y = a + b$.

Als η , de absoluut kleinste wortel is van

$$(1-\eta)^r \eta = (p\mu)^r q\mu$$

dan geldt voor een in $\eta = 0$ reguliere functie $f(\eta)$ de formule

$$(81) \quad f(\eta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^r q \mu^{r+1})^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[f'(\eta) \left(\frac{1}{1-\eta} \right)^{rn} \right]_{\eta=0}$$

welke analoog met (61) direct volgt uit de stelling van Lagrange-Bürmann.

Hieruit volgt voor $l \geq 1$

$$(82) \quad \eta_1^l = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{(r+1)n - l - 1}{n-l} (p^r q \mu^{r+1})^n$$

Verder hebben we wegens (10) en (19)

$$(83) \quad K_y(u, 1) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0 + k_0 + i(r+1)}{k_0 + i} u^{j_0 + k_0 + i(r+1)}$$

waarin voor $y \geq 0$ geldt $k_0 = \lceil \frac{y}{r} \rceil$ en $j_0 = r k_0 - y$. Dus wegens (74), (82) en (83) geeft (80) de functie $A_k(u, 1)$ als een som van bekende ontwikkelingen en producten van twee bekende ontwikkelingen. Gebruik makend van (71), (80) en (81) kan men zelfs $A_k(u, 1)$ verkrijgen als de som van een aantal bekende ontwikkelingen.